

# Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek II. című tárgyhoz

Burai Pál

Hatványsorok, Fourier sorok

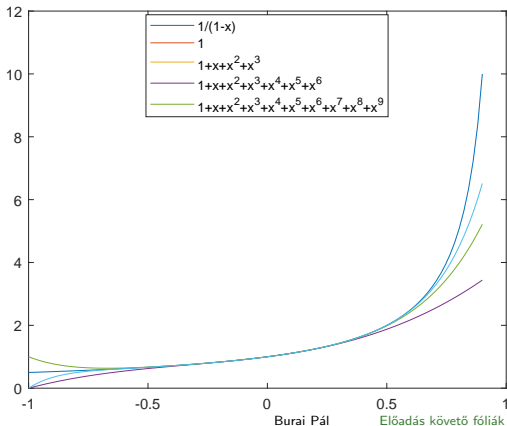
A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

# Hatványsorok, Taylor sorok

Közismert, hogy ha  $-1 < x < 1$  akkor

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Az egyenlet baloldalán álló kifejezés  $x$  hatványaiból álló, végtelen tagú összeg, a jobboldalon pedig  $x$ -nek egy szokásos függvénye áll.



# Hatványsorok, Taylor sorok

Azon függvényeket keressük, amelyek előállíthatók ilyen formában.  
Általában az

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

alakú összeget végtelen **hatványsornak** nevezzük.

Az

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

összeget a hatványsor  **$n$ . részletösszegének** nevezzük.

Ha egy függvény előáll ilyen alakban, akkor azt mondjuk, hogy **hatványsorba fejthető**.

## Hatványsorok alkalmazásai

- A sor  $n$ . részletösszegét kiszámítva megkaphatjuk a függvény helyettesítési értékének egy közelítését.
- Az  $n$ . részletösszeg a függvény egy közelítését adja.
- Bizonyos feltételek mellett a hatványsor tagonként integrálható (ha a sor abszolút konvergens), amellyel a függvény közelítő integrálját kaphatjuk meg.

# Hatványsorok, Taylor sorok

A valós analízisből ismert függvények nagy része előállítható hatványsor alakban, azaz

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

## Példák



$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



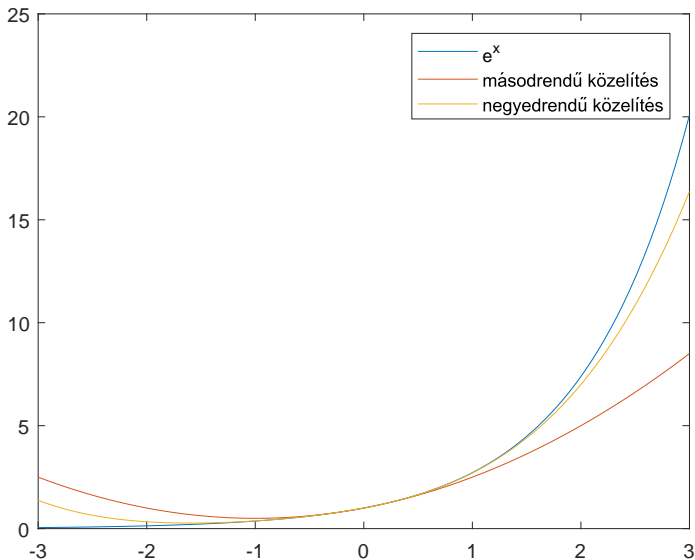
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$



$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

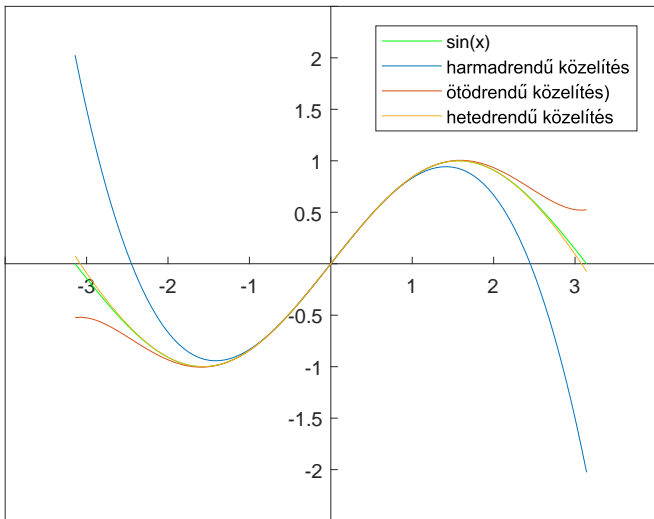
# Hatványsorok, Taylor sorok

Az  $e^x$  függvény hatványsorának részletösszegei:



# Hatványsorok, Taylor sorok

Az  $\sin(x)$  függvény hatványsorának részletösszegei:



# Hatványsorok, Taylor sorok

*Bizonyos feltételek mellett* a hatványsorok tagonként tetszőleges rendben differenciálhatóak, azaz

$$f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$f''(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots$$

$$f'''(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)' = 6a_3 + 24a_4 x + 60a_5 x^2 + \dots$$

A fentiekből az  $x = 0$  helyen a következőket kapjuk:

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad \frac{1}{2} f''(0) = a_2, \dots, \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n,$$

azaz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

amelyet az  $f$  függvény **Maclaurin sorának** nevezünk.

# Hatványsorok, Taylor sorok

Azon  $x \in \mathbb{R}$  értékek összességét, amelyekre a hatványsor konvergens a hatványsor **konvergencia tartományának** nevezzük.

## Példa

Az

$$1 + x + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

geometriai sor minden  $-1 < x < 1$ -re konvergens, egyébként divergens.

## Definíció

Az

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

hányadost az

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük.

## Tétel

Jelölje  $R$  a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

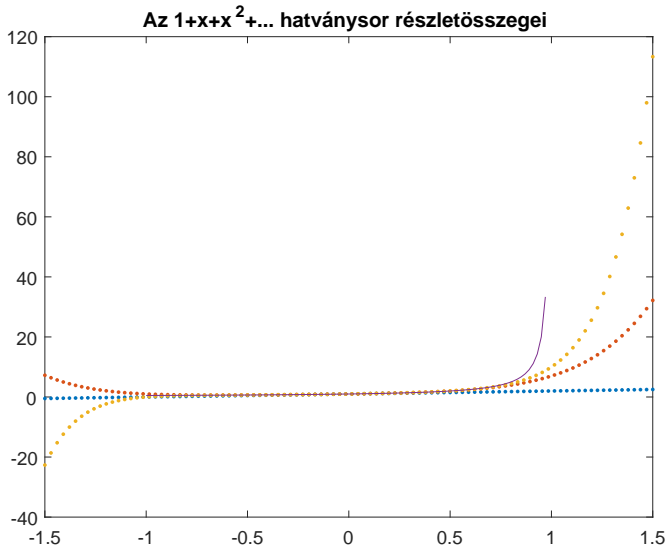
hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor a hatványsor minden  $|x| < R$  esetén abszolút konvergens,  $|x| > R$  esetén divergens,  $|x| = R$  esetén további vizsgálatok szükségesek a konvergencia eldöntéséhez.

## Feladat

Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát!

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.$$

# Hatványsorok, Taylor sorok



## Függvényérték közelítése Maclaurin sor segítségével

Tegyük fel, hogy a hatványsor konvergencia sugara  $R$ , és az összege  $f(x)$ , ha  $|x| < R$ . Legyen  $|x_0| < R$ . Számítsuk ki  $f(x_0)$  közelítő értékét!

$$f(x_0) = \underbrace{a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n}_{f(x_0) \text{ nedrendű közelítő értéke}} + \underbrace{a_{n+1}x_0^{n+1} + \dots}_{\text{maradéktag}}$$

## Példa

Becsüljük meg  $\sin(2)$  értékét!

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \text{ebből} \quad \sin(2) \approx 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{120} = \frac{14}{15} = 0.9333$$

A Maclaurin sor a függvényt a 0 pont közelében "jobban" közelíti. Az alkalmazások szempontjából fontos általánosítása a hatványsorba fejthető függvények tetszőleges  $|x_0| < R$  pont körüli hatványsorfejtése.

## Definíció

Az  $x_0$  egy környezetében végtelen sokszor differenciálható  $f$  függvény esetén, ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

akkor azt mondjuk, hogy  $f$  **Taylor sorba fejthető**  $x_0$  **körül** és az egyenlőség jobb oldalán álló végtelen összeget az  $f$  **függvény**  $x_0$  **körüli Taylor sorának** nevezzük.

## Példa

Fejtsük Taylor sorba a  $\cos$  függvényt  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  körül. Mivel  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ , ezért a sor minden páros rendű tagja (0. derivált, 2. derivált stb.) kiesik, így

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \\ &\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \dots = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \dots\end{aligned}$$

## Feladat

Közelítsük az  $e$  szám értékét az exponenciális függvény Taylor sora segítségével! Mi lesz a "jó"  $x_0$ ?

## Hatványsorok, Taylor sorok, Példa

A nyomás  $p$  a tengerszint feletti magasság  $h$  függvénye a következőképpen:

$$p(h) = p = p_0 e^{-\alpha h},$$

ahol  $p_0 = p(0)$ , azaz, a nyomás a tengerszinttel azonos magasságon,  $\alpha$  pedig adott konstans, amely a levegő sűrűségétől függ. Ekkor a  $h$  magasságbeli és a tengerszinten lévő nyomás különbsége:

$$\Delta p = p(h) - p(0) = p - p_0 = p_0(e^{-\alpha h} - 1).$$

Az exponenciális függvény közelítését felhasználva  $e^{-x} = 1 - x + \dots$ , az előző nyomáskülönbség közelítő értéke:

$$\Delta p \approx p_0(1 - \alpha h - 1) = -p_0 \alpha h.$$

Tegyük fel, hogy meg akarjuk becsülni azt a  $h$  magasságot amelyen a nyomás 1%-kal kisebb, mint a tengerszinten, azaz  $\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{-1}{100}$ , ha  $\alpha = 0.121 \cdot 10^{-3}$ . Ekkor

$$h \approx -\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{100} \frac{1}{0.121 \cdot 10^{-3}} = 82.64 \text{ m.}$$

# Fourier sorok

A hatványsorokkal történő függvényközelítés hátránya, hogy a hatványsor első  $n$  eleméből álló polinom csak egy adott pont környezetében ad jó közelítést. Egy mérnöki alkalmazások szempontjából fontos periodikus függvény esetében a hatványsor egy véges darabjával nem lehet jól közelíteni a függvényt a teljes valós számok halmazán, hiszen a polinomok nem periodikus függvények. A megoldást a periodikus függvényekből álló Fourier sorok jelentik.

## Definíció

Az  $f$  függvény **periodikus**, ha létezik  $L$  pozitív valós szám, hogy  $f(x) = f(x + L)$  minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén. A legkisebb olyan  $L$ -et, amellyel ez teljesül a függvény **periódusának** nevezzük.

## Példa

A  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  függvényre teljesül, hogy  $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$  tetszőleges  $k$  egész szám esetén, így a szinusz függvény periodikus. A legkisebb pozitív egész, amelyre az előbbi egyenlőség teljesül  $2$ , tehát a szinusz függvény periódusa  $2\pi$ .

## Definíció

Legyenek  $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$  numerikus sorozatok, ekkor az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

függvénysort **Fourier sornak** nevezzük.

A sor tagjainak különböző a periódusa, az  $n$ -nek  $\frac{2\pi}{n}$ . Tekintsünk egy olyan együtthatórendszerre  $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ , amelyre a fenti sor konvergens, ekkor létezik egy olyan  $f$  függvény, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Ekkor ezt az  $f$  **függvény Fourier sorának** nevezzük.

Bebizonyítható, hogy ezt a sort lehet tagonként integrálni.

**Kérdés:** Hogyan határozható meg egy adott függvény esetén az előbbi együtthatórendszer?

# Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

Az együtthatók kiszámításához szükségünk lesz az alábbi integrálokra. Tetszőleges  $n, m$  pozitív egész számok esetén fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n, \\ \pi, & \text{ha } m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

# Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

## $a_0$ kiszámítása

Integráljuk a Fourier sort a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon, ekkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx}_{=2\pi a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx}_{=0},$$

azaz

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

# Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

## $a_k$ kiszámítása

Szorozzuk a Fourier sort  $\cos(kx)$ -szel, majd integráljuk a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon, ekkor

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx}_{=0} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx}_{=0} \\ &+ a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(kx) dx}_{=\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx}_{=0}, \end{aligned}$$

azaz

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

# Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

## $b_k$ kiszámítása

Szorozzuk a Fourier sort  $\sin(kx)$ -szel, majd integráljuk a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon, ekkor

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx}_{=0} \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx}_{=0} + b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(kx) dx}_{=\pi}, \end{aligned}$$

azaz

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

# Fourier sorok, Az együtthatók kiszámítása

Ha az  $f$  függvény  $2\pi$  szerint periodikus és előáll

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

alakban, akkor az együtthatókra teljesülnek a következők:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Mivel  $f$   $2\pi$  szerint periodikus, tetszőleges  $2\pi$  hosszúságú intervallumon ugyanezt az eredményt kapjuk.

Nem minden függvény Fourier sora konvergens pontonként, de a mérnöki alkalmazásokban előforduló függvények nagy többségének konvergens a Fourier sora. Számtalan konvergenciakritérium ismert mind a pontonkénti, mind a más típusú konvergenciával kapcsolatban. Az egyik legismertebb a

## Dirichlet lemma

Tegyük fel, hogy  $f$  periodikus, korlátos, véges sok szélsőértéke van, és véges sok szakadása, amelyek mind elsőfajúak. Ekkor  $f$  Fourier sora pontonként konvergens. Továbbá, a függvény folytonossági helyein a függvényértékhez, egyébként a bal- és jobboldali határérték számtani közepéhez konvergál.

# Fourier sorok, Páros és páratlan függvények Fourier sora

Ha  $f$  páros, azaz  $f(x) = f(-x)$ , akkor a szinuszos együtthatók eltűnnek. Tehát  $b_n = 0$ ,  $n = 1, \dots, \infty$ .

## Páros függvény Fourier sora

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Ha  $f$  páratlan, azaz  $f(x) = -f(-x)$ , akkor a koszinuszos együtthatók tűnnek el. Tehát  $a_n = 0$ ,  $n = 1, \dots, \infty$ .

## Páratlan függvény Fourier sora

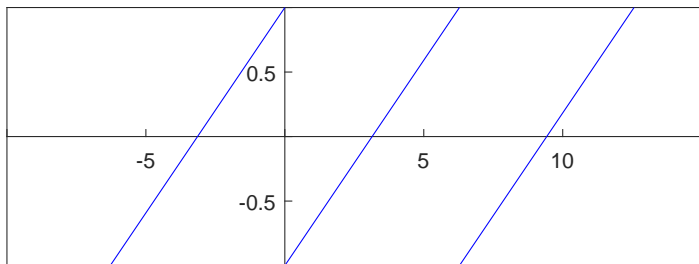
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

# Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

**Fűrészfog függvény:** Az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x + 1 & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{\pi}x - 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$2\pi$  szerint periodikus kiterjesztését a valós számok halmazára fűrészfog függvénynek nevezzük.



## Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

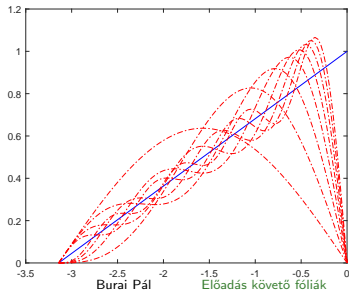
A fűrészfog függvény páratlan, ezért a Fourier sora csak a szinuszos tagokat tartalmazza. Így csak a  $b_k$  együtthatókat kell kiszámítanunk.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left( \frac{1}{\pi}x + 1 \right) \sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{\pi}x - 1 \right) \sin(kx) dx = \frac{-2}{k\pi}.$$

Tehát a Fourier sor alakja:

$$\frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

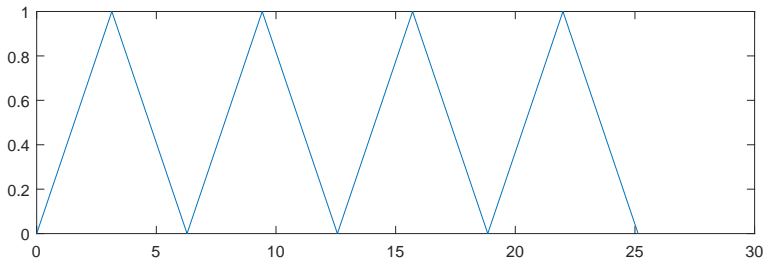
Az első nyolc tagig a részletösszegek grafikonja a  $[-\pi, 0]$  intervallumon.



**Háromszög hullámfüggvény:** Az

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$2\pi$  szerint periodikus kiterjesztését a valós számok halmazára háromszög hullámfüggvénynek nevezzük.



# Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

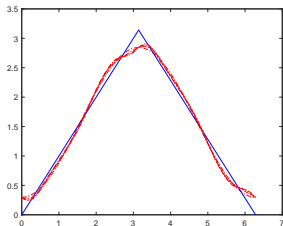
A háromszög hullámfüggvény páros, ezért a Fourier sora csak a koszinuszos tagokat tartalmazza. Így csak az  $a_k$  együtthatókat kell kiszámítanunk.

$$a_0 = \pi, \quad a_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \text{ páros,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Tehát a Fourier sor alakja:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{-4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Az első négy tagból álló részletösszegek grafikonja a  $[0, \pi]$  intervallumon.

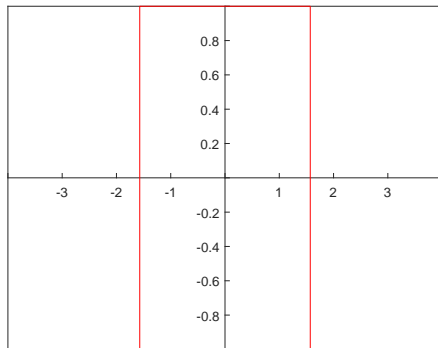


# Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

**Téglalap hullámfüggvény:** Az

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$2\pi$  szerint periodikus kiterjesztését a valós számok halmazára téglalap hullámfüggvénynek nevezzük.



# Fourier sorok, Példák Fourier sorokra

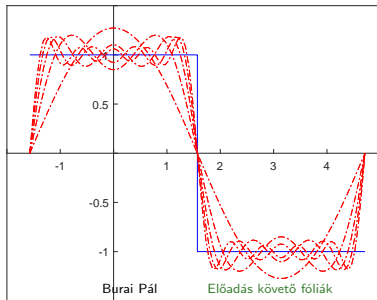
A téglalap hullámfüggvény páros, ezért a Fourier sora csak a koszinuszos tagokat tartalmazza. Így csak az  $a_k$  együtthatókat kell kiszámítanunk.

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}$$

Tehát a Fourier sor alakja:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin(n\pi)}{2} \cos(nx).$$

Az első tíz tagból álló részletösszegek grafikonja a  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  intervallumon.



# Fourier sorok, Tetszőleges periódusú függvények

Legyen  $f$  periodikus  $2L$  periódussal, azaz

$$f(x + 2L) = f(x).$$

Végezzük el a  $z = \frac{\pi}{L}x$  helyettesítést, ekkor az  $\tilde{f}(z) = f\left(\frac{\pi}{L}x\right)$  függvény már  $2\pi$  szerint lesz periodikus. (Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban  $\tilde{f}$  helyett  $f$ -et írunk). Az új függvény Fourier sora pedig az alábbi alakú lesz

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nz) + b_n \sin(nz)),$$

amelyből

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right).$$

# Fourier sorok, Tetszőleges periódusú függvények

Ha az  $f$  függvény  $2L$  szerint periodikus és előáll

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

alakban, akkor az együtthatókra teljesülnek a következők:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

## Példa

**A 4 periódusú téglalap hullámfüggvény:** Az

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

4 szerinti kiterjesztése az egész számegyenesre a 4 periódusú téglalap hullámfüggvény.

Tekintsük a következő szinuszos Fourier sort

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t + \phi_n),$$

amely egy elektromos rendszerbeli jelt vagy rezgést ír le. Ekkor  $\omega$  az **alapfrekvencia**  $2\omega, 3\omega, \dots$  a **harmonikusok**. Az  $a_1, a_2, \dots$  együtthatók pedig az alapfrekvenciához, illetve a harmonikusokhoz tartozó **amplitúdók**.

Az ilyen és ehhez hasonló periodikus jelek- áthaladva egy erősítőn, energiaátalakítón vagy szűrőn- torzulhatnak, csillapíthatnak.

A fenti jelet leíró Fourier sort jól jellemzi a

$$(a_1, \omega), \quad (a_2, 2\omega), \dots (a_n, n\omega), \dots$$

**Fourier spektrum**, melynek változása a jel torzulásával, változásával hozható összefüggésbe.

Ha a bemenő és a kijövő jel Fourier spektruma megegyezik, akkor a jel nem torzult a jelátvitel során.

Számítsuk ki a következő függvények Fourier sorát!

1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

3

$$f(x) = |\sin(x)|$$

4

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2\pi \leq x < -\pi \\ 1 & -\pi \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$